کلیدواژه‌ها: مفهوم تابع، بازنمایی، یادگیری، استاندارد، ارتباط و اتصال بین مفاهیم.

اســـــکمپ[1] (۱۹۸۹) بیـــان می‌کند که «تعداد زیادی از مطالعات تحقیقی کامل در ســـال‌های اخیر، نشان‌دهندهٔ، ناپیوستگی بین ریاضیِ کلاس درس و ریاضی مورد استفاده در فعالیت‌های روزمره است». وی ادامه می‌دهـــد که «اگـــر یکی از مقاصد ما در آمـــوزش ریاضی این است که دانش‌آموزان را به ریاضیاتی که بعد از مدرسه نیاز دارند تجهیز کنیم، شـــواهد زیـــادی وجود دارد کـــه در این راه موفـــق نبوده‌ایم یا حداقل راه سرراستی نداریم که ما را امیدوار کند». به گفته وی، «برنامه درسی ریاضی مدرســـه‌ای ما، واقعاً براســـاس این فرض استوار است که ریاضی یک نهاد رسمی دانش است؛ موضوعی شامل اشـــیای ریاضی با مفاهیمی بـــدون کاربرد در خارج از آن. چنین ریاضیاتی، می‌تواند کاملاً از جهان تجربی جدا باشـــد و فقط به خاطـــر خودش مورد مطالعه قرار گیـــرد. اگرچه ما هم‌چنـــان، انتظار داریم کودکان آن را در زندگی آیندهٔ خود به‌کار ببرند».

بازنمایی‌های چندگانه در ریاضی

کلـــود ژانویـــه[2] (۱۹۸۷)، از محققان پیشتاز در «بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در یاددهی و یادگیری ریاضی» بود. به اعتقاد وی، منظور از یک بازنمایی این است که برای درک بهتر یک مفهوم، ممکن است از تمثیل یا چیز دیگری اســـتفاده شـــود. گاهـــی ایـــن بازنمایی‌ها مربوط به ســـاخت‌های ذهنی‌اند که در ایـــن صورت،«بازنمایی‌های داخلی» نامیده می‌شـــوند و گاهی به ســـاخت‌های فیزیکی اشـــاره دارند کـــه به آن‌ها، «بازنمایی‌های خارجـــی» گفته می‌شـــود. برای مثال، وقتی شـــخصی یک نمودار را یـــک بازنمایی برای مفهوم تابع در نظر می‌گیـــرد، تصور ذهنی او از این نمـــودار (بازنمایی خارجی) و تابع، یک بازنمایی داخلی است. پـــس از ژانویه، تحقیقـــات قابل توجهی در رابطه با بازنمایی‌ها در حوزهٔ آموزش ریاضی انجام شـــد. برای نمونه، کســـتبرگ[3](۲۰۰۲) بازنمایـــی یک دانش‌آمـــوز از یک مفهوم ریاضی را، شـــامل نشانه‌ها و علامت‌هایـــی می‌دانـــد که وی از آن‌ها، بـــرای فکر کردن به یک مفهوم و ارتباط دادن آن با ســـایر مفاهیم اســـتفاده می‌کند. از نظر کستبرگ (۲۰۰۲)، بازنمایی‌ها به چهار شکل نوشتاری[4]، تصویری[5]، جدولـــی[6] و گفتـــاری[7] تقســـیم می‌شـــوند. او توضیح می‌دهد که بازنمایی نوشتاری، از مجموعه‌ای

از نوشته‌ها و اعداد تشکیل شده است، در حالی که بازنمایی تصویری شامل حداقل یک تصویر است. بازنمایی جدولی نیز جمع‌آوری داده‌های عددی در یک جدول است و بالاخره، بازنمایی گفتاری، شامل توصیفات گفته شده است. کستبرگ (۲۰۰۲) برای آشنایی بیشتر با این چهار نوع بازنمایی، برای هر یک مثال‌های ملموس ارایه می‌دهد.

از نظر وی، **بازنمایی‌های نوشتاری**، نمادگذاری‌هایی هستند که دانش‌آموزان، آن‌ها را برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی در نوشتن، به کار می‌برند و شامل نام‌ها، نمادگذاری‌ها، اصول و توصیفات‌اند. نام‌ها، اصطلاحاتی هستند که برای اشاره به اشیای ریاضی یا رویه‌ها یا مجموعه‌ای از هر دو، استفاده می‌شوند (به‌طور مثال، اصطلاح مبنا). هم‌چنین، نمادگذاری‌ها، توضیحات ویژگی‌ها و نمونه‌هایی از مفاهیم نوشتاری ریاضی هستند که با نمادهای ریاضی بیان می‌شوند (مانند $\log_2^1=0$). از این‌ها گذشته، اصول، اظهارات کوتاهی‌اند که به‌عنوان قوانین و راهنمایی‌های ریاضی به کار می‌روند (مثل این که لگاریتم‌ها توابع نمایی هستند). بالاخره، توصیفات، توضیحاتی درمورد رویه‌ها، نتایج و فواید رویه‌ها، اشیای ریاضی و رابطه‌ها هستند (به‌طور مثال یک تابع، مجموعه‌ای از نوشته‌ها و اعداد است.)

اما **بازنمایی‌های تصویری** تصاویری هستند که دانش‌آموزان از آن‌ها برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی به‌طور شهودی استفاده می‌کنند. **بازنمایی‌های جدولی** که از داده‌های عددی تشکیل شده‌اند، ابزاری هستند که دانش‌آموزان از آن‌ها برای فکرکردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی، استفاده می‌کنند. همچنین **بازنمایی‌های شفاهی**، کلمات گفته شده و توضیحاتی هستند که دانش‌آموزان برای صحبت کردن در مورد یک مفهوم ریاضی به کار می‌برند و مانند **بازنمایی‌های نوشتاری**، شامل نام‌ها، نمادگذاری‌ها، اصول و توصیفات هستند که در آن‌ها، اگرچه تعریف‌ها شبیه تعریف‌های نوشتاری‌اند، اما تنها گفته می‌شوند و به‌صورت نوشته در نمی‌آیند (مثل اینکه به‌طور شفاهی بگوییم «لگاریتم عدد ۱، صفر است».)

زهرا گویا ـ عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی
علی امامی ـ کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی کهریزک ـ تهران بزرگ

بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در درک مفهوم تابع

بازنمایی‌ها در همهٔ ارتباطات ریاضی نقش ایفا می‌کنند و هر یک به نوعی، در نشان دادن جنبه‌هایی از تفکر انسان سهیم‌اند. درواقع، کستبرگ (۲۰۰۲) معتقد است که اگرچه درک فرد نسبت به یک مفهوم ریاضی در ذهن وی شکل می‌گیرد، اما به تعبیر ژانویه (۱۹۸۷)، چگونگی استفاده کردن یک یادگیرندهٔ ریاضی از نمادها برای نمایش دادن یک مفهوم، نوعی بازنمایی درونی وی از آن مفهوم است. برای مثال، اگر دانش‌آموزی برای تقریب زدن $\log_2^3$ از نمودار استفاده کند، می‌تواند نشان‌دهندهٔ این باشد که از نظر او، مفهوم لگاریتم با نمودار تابع لگاریتمی پیوند خورده است. به‌گفته کستبرگ، یک دانش‌آموز وقتی درمورد یک مفهوم فکر می‌کند یا با آن ارتباط برقرار می‌کند، احتمالاً از ترکیبی از چهار بازنمایی مورد بحث استفاده می‌کند که چنین استفاده‌ای، نشان دهنده درک او از یک مفهوم ریاضی است.

این در حالی است که به گفتهٔ مارکوس[8] (۲۰۰۶)، یک بازنمایی ابزاری است برای فکر کردن به چیزی که به واسطهٔ استفاده از ابزار ساخته شده است. یک بازنمایی، قابلیت قرار گرفتن به‌جای چیز دیگری را دارد، ولی این کار ضروری نیست. هر بازنمایی شامل دو وجه درونی و بیرونی است که تقریباً از اهمیت برابری برخوردارند و جدایی ناپذیرند، اما لزوماً به جای یکدیگر قرار نمی‌گیرند. وجه خارجی آن برای افراد از طریق حواسشان قابل درک است ولی وجه درونی آن خیر؛ یعنی درک دانش‌آموزان از یک مفهوم، لزوماً همان بازنمایی خارجی نیست. به عبارتی دیگر، وجه خارجی لزوماً فقط وجه داخلی را منعکس نمی‌کند، بلکه اثر متقابل آن‌ها روی هم، به دانش‌آموز اجازه می‌دهد تا به‌طور مؤثری از این ابزار، برای درک مفهوم استفاده کند.

از این گذشته، گلدین[9] و کاپوت[10] (۱۹۹۶) و گلدین(۱۹۹۸)، نگاه منسجم‌تری به بازنمایی‌ها دارند و آن‌ها را نظامی می‌دانند که افراد برای یادگیری ریاضی، به شکل‌های مختلف از آن استفاده می‌کنند. برای مثال، آنان به این نتیجه رسیدند که یک مفهوم جدید، معمولاً از طریق بازنمایی‌ها به دانش‌آموزان معرفی می‌شود و به‌تدریج، بازنمایی‌های بیرونی بر درک و فهم دانش‌آموزان تأثیر گذاشته و آنان را قادر می‌سازد تا به توسعهٔ بازنمایی‌های درونی آن مفهوم بپردازند. این باور، همسو با نظرات ازل[11] (۲۰۰۸) است که معتقد است توانایی نشان دادن یک مفهوم با شیوه‌های گوناگون، درک عمیقی از آن مفهوم را در ذهن ایجاد می‌کند. بدین سبب، بازنمایی‌های ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا مفاهیم ریاضی را از منظرهای متفاوت ببینند و با استفاده از برقراری ارتباط بین آن‌ها، به درک بهتری از یک مفهوم دست یابند. با چنین استدلالی، «شورای ملی معلمان ریاضی» (۲۰۰۰) (NCTM)[12] در آمریکا و کانادا، بازنمایی را یکی از «استانداردهای فرایندی» برنامهٔ درسی ریاضی اعلام نمود. بدین سبب، پرداختن به آن، توجیه قوی‌تری برای استفاده از بازنمایی‌ها در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای عرضه می‌کند.

بازنمایی از دیدگاه شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا(NCTM)

یکی از پنج استاندارد فرایندی که در سند شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM,۲۰۰۰) به آن اشاره شده، «بازنمایی» است. در این سند، درمورد استاندارد بازنمایی چنین گفته شده است:

برنامهٔ درسی ریاضی در همهٔ پایه‌های تحصیلی (از پیش‌دبستانی تا پیش‌دانشگاهی)، باید همهٔ دانش‌آموزان را به‌گونه‌ای آماده کند تا قادر به انجام موارد زیر شوند:

۱. خلق و استفاده از بازنمایی ها برای سازماندهی، ثبت و ارتباط دادن ایده‌های ریاضی؛

۲. انتخاب کردن، به کاربردن و تفسیر بازنمایی‌های ریاضی در حل مسائل؛

۳. استفاده از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و تغییر پدیده‌های ریاضی، اجتماعی و فیزیکی (ص ۳۶۰).

این شورا، ریاضی را به تعبیر استین[13] (۱۹۸۸)، «علم الگوها» می‌داند و بدین سبب معتقد است که بازنمایی‌ها، ابزارهایی هستند که به‌وسیله آن‌ها آن الگوها ثبت

شده و تجزیه و تحلیل می‌شوند و هنگامی که دانش‌آموزان از لحاظ ریاضی خبره می‌شوند، به‌طور گسترده‌ای تعداد بازنمایی‌های ریاضی و دانش استفادهٔ ثمربخش از آن‌ها را توسعه می‌دهند. شورا، این دانش را شامل انتخاب بازنمایی‌های مناسب برای رسیدن به دیدگاه‌های خاص جهت حصول اهداف مورد نیاز می‌داند. مثلاً در جبر، بازنمایی‌ها به‌طور فراگیری وجود دارند و نمودار حامل اطلاعات شهودی خاصی است، در حالی که توضیحات نمادین ممکن است برای دست‌ورزی، تحلیل و تبدیل آسان‌تر باشند. همین‌طور در مدل‌سازی ریاضی، استفاده از روش‌های متنوع برای نمایش داده‌ها، اهمیت بازنمایی‌ها را بیشتر مشخص می‌کند. این شورا معتقد است که به‌وسیلهٔ بازنمایی‌های گوناگون، دانش‌آموزان می‌توانند راه‌حل‌های مختلفی برای حل یک مسئله پیدا کنند و آن‌ها را با هم مقایسه کنند.

همچنین، بازنمایی‌ها استدلال کردن را که یکی دیگر از پنج استاندارد فرایندی است، تسهیل می‌کنند و ابزاری برای اثبات هستند. علاوه‌بر این‌ها، بازنمایی‌های گوناگون، راه‌های متفاوتی برای فکر کردن و دست‌ورزی با اشیای ریاضی فراهم می‌کنند و یک شیء ریاضی، وقتی از دیدگاه‌های مختلف دیده می‌شود، بهتر فهمیده می‌شود. هنگامی که دانش‌آموزان موضوع جدیدی را مطالعه می‌کنند، با بسیاری از بازنمایی‌های جدید برای مفاهیم ریاضی آشنا خواهند شد. آنان نیازمندند تا با انعطاف بیشتری بین بازنمایی‌های گوناگون ارتباط برقرار نمایند و این در حالی است که بخش عظیمی از توانایی ریاضی دانش‌آموزان، با مشاهده و کارکردن با موضوعات متفاوت ریاضی از دیدگاه‌های مختلف، ایجاد می‌شود. برای مثال، دانش‌آموزان خردسال در پایه‌های اول ابتدایی، اغلب برای درک و فهم مفاهیم ریاضی، از بازنمایی‌های ملموس و شهودی استفاده می‌کنند و به تعبیر برونر (۱۹۶۳)، در مرحله «مجسم» قرار دارند.

در پایه‌های بالاتر (معادل سه پایهٔ آخر ابتدایی)، دانش‌آموزان به‌تدریج، آمادگیِ ابداع و استفاده از بازنمایی‌های «نیمه‌مجسم» را برای اشیای ریاضی، مانند اعداد گویا که تجسم شهودی آن‌ها ساده نیست، پیدا می‌کنند. در دورهٔ دبیرستان و سال‌های پایان آموزش مدرسه‌ای، دانش‌آموزان به‌طور فزاینده‌ای با مفاهیم مجردی مانند تابع، معادلات، مثلثات، ماتریس‌ها و مانند این‌ها کار می‌کنند تا توانایی تجریدی‌شان افزایش یابد. بدین سبب در این دوره، نوع بازنمایی‌ها تغییر می‌یابد و بر میزان تجریدشان افزوده می‌شود تا دانش‌آموزان را قادر به تشخیص ساختارهای ریاضی مفاهیم نماید. به‌طور مشخص، در این مرحله، از دانش‌آموزان انتظار می‌رود تا چگونگی استفاده از یک نماد را در مقوله‌های مختلف تشخیص دهند و به‌عنوان نمونه، بتوانند از نماد (a , b) به‌عنوان زوج مرتب، یک نقطه در دستگاه مختصات، یک بازه و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه دو عدد استفاده کنند. درواقع، دانش‌آموزان دبیرستانی به کمک بازنمایی‌های مناسب، ویژگی‌های ساختاریِ پدیده‌های ریاضی را تشخیص می‌دهند و روابط ریاضی بین این ویژگی‌ها را درک می‌کنند. این کار باعث می‌شود که بتوانند به تبیین و تفسیر مدل‌های پیچیده‌تر و کارآمدتری برای درک مفاهیم ریاضی بپردازند. به‌عنوان مثال، پدیده‌هایی با ویژگی تناوب، اغلب با توابع مثلثاتی مدل‌سازی می‌شوند؛ یا اینکه تابع نمایی، بازنمایی مناسبی برای رشد جمعیت است و بازنمایی‌های تکراری و بازگشتی برای توصیف برخی پدیده‌های واقعی کارآمد هستند. برای ایجاد چنین توانایی‌هایی در دانش‌آموزان، معلمان نقشی اساسی دارند و می‌توانند به دانش‌آموزان کمک کنند تا تصورات شخصی خود را به بازنمایی‌های شناخته شدهٔ ریاضی پیوند دهند. البته این شورا به استناد پژوهش‌های انجام شده، به این جمع‌بندی رسیده است که اهمیت استفاده از بازنمایی‌های چندگانه، بایستی در طول دورهٔ آموزشی دانش‌آموزان، مورد توجه قرار گیرد و استفاده از بازنمایی‌های مختلف برای درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی، بخش مهمی از فرایند یاددهی- یادگیری ریاضی را تشکیل دهد.

تمام دانش‌آموزان باید بتوانند ارتباطات ریاضی‌وار برقرار کرده و ریاضی‌وار استدلال کنند و ریاضی را قدر بدانند تا دانش‌آموزانی شوند که بر قابلیت‌ها و توانایی‌های خود در انجام تکالیف ریاضی اعتماد پیدا کرده ودر نهایت،توانایی حل مسائل ریاضی را پیدا کنند

درواقع، دانش‌آموزان پایه‌های ابتدایی از بازنمایی‌های متنوع و ارتباط و اتصال بین مفاهیم، برای ساخت‌وساز دانش ریاضی و بیان ایده‌های ریاضی خود استفاده می‌کنند و با این کار، فرایند حرکت به سمت تجرید را تسریع می‌کنند. آن‌ها همچنین، از بازنمایی‌ها برای سازماندهی تفکرشان استفاده می‌کنند. در نتیجه، با حرکت بین بازنمایی‌های مختلف یک ایده یا مفهوم، درک و استفاده از مفاهیم و رویه‌های ریاضی افزایش می‌یابد و ویژگی‌های مسئله‌های ریاضی بهتر دیده می‌شود. بدین سبب، استفادۀ دانش‌آموزان از بازنمایی‌ها - به‌خصوص آن‌هایی که برایشان ملموس‌تر است، امری ضروری در یادگیری ریاضی محسوب می‌شود.

ارتباط بین بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در یادگیری

از دیدگاه شورای ملی معلمان ریاضی، مهم‌ترین اهداف آموزش ریاضی این است که تمام دانش‌آموزان یاد بگیرند که برای ریاضی ارزش قائل شوند و به اهمیت ریاضی در جریان زندگی و در پرورش ذهن و اندیشه واقف شوند. همچنین، تمام دانش‌آموزان باید بتوانند ارتباطات ریاضی‌وار برقرار کرده و ریاضی‌وار استدلال کنند و ریاضی را قدر بدانند تا دانش‌آموزانی شوند که بر قابلیت‌ها و توانایی‌های خود در انجام تکالیف ریاضی اعتماد پیدا کرده و در نهایت، توانایی حل مسائل ریاضی را پیدا کنند (گویا، ۱۳۷۵).

استفاده‌ازبازنمایی‌های گوناگون و مرتبط کردن آن‌ها به یکدیگر، باعث درک بهتر دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی می‌شود. تحقیقات صورت‌گرفته در این حوزه نشان می‌دهد اگر بازنمایی‌ها به‌صورت مؤثری با هم متصل شوند، زمینۀ درک موضوعات ریاضی فراهم می‌شود. در نتیجه، ایجاد ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌های فیزیکی، تصویری، نمادین، نموداری، شفاهی و ذهنیِ از یک ایدۀ ریاضی، نقشی کلیدی در درک عمیق‌تر آن ایفا می‌کند. مثلاً، وقتی دانش‌آموزان می‌بینند که یک بازنمایی، مثل یک معادله، می‌تواند وضعیت‌های زیادی را توصیف کند، به قدرت ریاضی پی می‌برند و وقتی می‌فهمند که بعضی از بازنمایی‌ها برای نمایش یک مسئله مفیدتر از بعضی دیگرند، آن‌وقت، فایده و انعطاف‌پذیری ریاضی را می‌بینند.

این، مشابه ایده‌ای است که قبلاً اسکمپ (۱۹۸۹)، به‌عنوان شبکه‌های تلفیقی یا طرح‌واره‌های شناختی مطرح کرده بود و معتقد بود که آن‌ها، هم محصول ساخته شدن دانش و هم ابزاری برای ساختن دانش جدید هستند. یعنی همان‌طور که یادگیری رخ می‌دهد، آن شبکه‌ها نیز آرایش مجدد می‌یابند و ارتباطاتی به آن‌ها اضافه می‌شود، یا اینکه همان ارتباطات قبلی جرح و تعدیل می‌شوند. زمانی که تفکر فعال و بازتابی وجود داشته باشد، طرح‌واره‌ها دائماً جرح و تعدیل می‌شوند یا تغییر می‌یابند، به‌طوری که ایده‌های جدید بهتر بتوانند با آنچه از قبل ساخته شده است، جفت‌وجور شوند. درواقع، فهمیدن را می‌توان به‌صورت میزان کیفیت و کمیت ارتباط‌هایی که یک ایده با ایده‌های قبلی برقرار می‌کند، تعریف کرد.

به‌گفتۀ مارکوس(۲۰۰۶)، ارتباطات و اتصالات و وابستگی‌های بین بازنمایی‌ها و اجزای دانش، همچنین توانایی حرکت، تغییر و ترجمه بین بازنمایی‌ها، از مشخصه‌های مهم یادگیری و حل مسئله است (هیبرت و لِفور،۱۹۸۶؛ هاپاسالو و کدیجویچ، ۲۰۰۰؛ تال[۱۴] و وینر[۱۵] ،۱۹۸۱؛ گلدین، ۱۹۹۸؛ دریفوس[۱۶] ،۱۹۹۱؛ هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲؛ زیمرمن[۱۷]، ۲۰۰۵).

از نظر شورای ملی معلمان ریاضی، مطالعۀ ریاضی باید شامل فرصت‌های زیادی برای ایجاد ارتباطات و اتصالات ریاضی باشد تا دانش‌آموزان بتوانند:

- اجسام فیزیکی، تصورات و نمودارها را به یکدیگر و به ایده‌های ریاضی مرتبط کنند؛
- تفکرشان را درمورد ایده‌ها و موقعیت‌های ریاضی نشان دهند، یعنی بین زبان روزانه و زبان و نمادهای ریاضی، ارتباط برقرار کنند.
- درک کنند که تولید و استفاده از بازنمایی‌ها ، بحث کردن، خواندن، نوشتن و گوش‌دادن به ریاضی، بخش‌های حیاتیِ یادگیری ریاضی هستند.

این توصیه‌ها نشـان می‌دهد کـه از نظر این شـورا، بازنمایی‌ها از راه‌های مهم ایجـاد ارتباط بین ایده‌های ریاضی در همهٔ سطوح‌اند. این ارتباط‌ها هم به دو دسته، شامل «مدل‌سـازی ارتباطات و اتصالات بین شرایط مسئله‌ای که از دنیای واقعی یا از یک موضوع غیرریاضی و بازنمایی ریاضی آن نشأت گرفته» و «ارتباطات و اتصالات ریاضی بین دو بازنمایـی هـم‌ارز و فرایندهای متناظر با هم» تقسیم می‌شود.

هیبـرت و کارپنتـر (۱۹۹۲)، یک نظریهٔ شـناختی بـرای درک ریاضی دانش‌آمـوزان ارایه کرده‌اند کـه در آن، وجود شـبکه‌هایی از بازنمایی‌های درونی پیش‌بینی شده است که تعداد و قدرت ارتباط‌های بین بازنمایی‌هـا، به‌عنوان معیاری برای میزان یادگیری در نظر گرفته شده اسـت. برای مثال، طبق این نظریه، دانش‌آمـوزی که در ذهن خـود، یک بازنمایـیِ داخلی برای تابع ایجاد کرده است که با تعریف تابع و نمودار آن مرتبط است، درک بهتـری از تابع دارد تا دانش‌آموزی کـه به‌طور سـاده، تنهـا مطالبی درمورد تابع شنیده است. این نظریه بر سه فرض زیر استوار است:

۱. دانـش به‌صـورت درونی نمایـش داده می‌شـود و ایـن نمایش‌هـای درونی، سـاختاری هستند؛

۲. بیـن بازنمایی‌های درونی و بیرونیِ دانش، یک رابطه وجود دارد؛

۳. بازنمایی‌های داخلی، به هم متصل‌اند.

علاوه‌بر این، هیبرت و کارپنتر توضیح داده‌اند کـه بازنمایی‌های داخلـی و ارتباط‌هایشـان، از روی تحلیـل بازنمایی‌هـای خارجـی و ارتباط‌هـای آن‌هـا، مشـخص می‌شـوند. امـا شـناخت ایـن بازنمایی‌هـای ذهنـی و ارتباط‌ها ساده نیسـت. با اینکه آموزشگران ریاضی نمی‌دانند یـک دانش‌آموز چگونه مفاهیم ریاضـی را به‌طور ذهنـی بازنمایی می‌کند یا ماهیت این بازنمایی‌ها چیست، اما معتقدند که حل دانش‌آموز از یک مسـئله، تحت تأثیـر بازنمایی‌های بیرونی (اشیای فیزیکی، تصاویر، نمادها و مانند این‌ها) قرار دارد. به‌طور مثال، مسائل حل‌شـده در بیرون و درون مدرسـه بر بازنمایی‌های درونی اثر می‌گذارند و به‌وسـیلهٔ شبکه‌های مفهومی حمایت می‌شـوند (نقل شده درکتسبرگ، ۲۰۰۲). هیبرت و کارپنتـر(۱۹۹۲) ادعا می‌کنند که برای «تفکر درمـورد ایده‌های ریاضی» این بازنمایی‌ها مورد نیازند. به گفته آن‌ها، ارتباط‌ها یا با توجه کردن به شـباهت‌ها و تفاوت‌ها یا به‌وسیلهٔ شمول و دربرگیری شکل می‌گیرنـد، بدیـن ترتیب که یک ایدهٔ جدید، با ایده‌های دیگری که تاکنون به‌صـورت ذهنی بازنمایی شده‌اند، مقایسه می‌شود، یعنی یک بار دیگر، شـباهت‌ها و تفاوت‌ها در ذهن فهرست می‌شوند و یادگیرنده، می‌توانـد بازنمایی ذهنی خود را از یـک ایده، با سـاختارهای موجود مرتبط کند.

از نظـر مارکـوس (۲۰۰۶)، ارتباطات و اتصالات به دو شـکل **بازتابی**[18] و **شـراکتی**[19] هستند. وقتـی کسـی از یـک بازنمایی به‌جای بازنمایی دیگری اسـتفاده کنـد، ارتباط **شـراکتی** بین دو بازنمایی برقرار کرده است و اگر از یک بازنمایی برای توضیح دیگری اسـتفاده کند، یک ارتباط **بازتابی** بین دو بازنمایی ایجاد نموده است.

ایـن مشـخصه‌ها، ماهیـت بازنمایی‌ها را به‌عنوان ابزاری برای فکرکردن برجسته‌تر می‌کنند. در حل مسـئله، اغلـب تعویض بین بازنمایی‌ها اهمیـت دارد و معمولاً لازم اسـت به کمـک توضیح یک بازنمایی به‌وسـیلهٔ یـک بازنمایی دیگر، اسـتدلال کنیـم. به‌علاوه، مارکـوس(۲۰۰۶) ابراز می‌دارد که در یک اتصال بازتابی، تشـخیص اینکه کـدام بازنمایی برای توضیح استفاده شده و کدام‌یک توضیح داده شده‌اند دشوار است و بیشتر اوقات به نظر می‌رسـد که بازنمایی‌ها، دو بـه دو یکدیگر را توضیح می‌دهند. همچنین، او تأکید کرده اسـت که این اتصال، در سـاختارهای ذهنی شخص تثبیت نشده، بلکه در عمل وی هنگام حل مسئله و بحث‌هایی کـه بـرای فهمیـدن و کمک به فهمیدن دیگـر می‌کند، نمود پیدا

یک تابع می‌تواند به‌وسیلهٔ توضیح نوشتاری، فرمول جبری، جدولی از مقادیر ورودی- خروجی و بالاخره با یک نمودار توصیف شود. در نتیجه، لازم است دانش‌آموزان فرصت داشته باشند از طریق فعالیت‌های گوناگون مانند توصیف روابط بین پدیده‌ها در جهان واقعی، بازنمایی‌های مختلف تابع از جمله نمایش نمودار توابع و خواندن و تفسیر و توضیح، آن‌ها را یاد بگیرند

می‌کند. به اعتقاد گلدین و کاپوت (۱۹۹۶)، دو بازنماییِ بیرونی، ممکن است به‌صورت درونی در ذهن شخصی که آن‌ها را ساخته و درک کرده، به هم وصل شوند.

گویا و سرشتی (۱۳۸۵)، از تال(۱۹۹۱) نقل می‌کنند که فرایند یادگیری ریاضی، دارای چهار مرحله است که عبارت‌اند از:

- ✓ استفاده از یک نوع بازنمایی؛
- ✓ استفاده از بیش از یک نوع بازنمایی به‌صورت موازی؛
- ✓ ایجاد ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌های مختلف؛
- ✓ تلفیق بازنمایی‌ها و حرکت منعطف بین آن‌ها.

آن‌ها از قول تال(۱۹۹۱)، بیان می‌کنند که تشخیص ارتباط بین بازنمایی‌های معادل و تشخیص خواص مشترک آن‌ها، منجر به تشکیل مفهوم مجرد اشیاء و فرایندهای ریاضی می‌شود.

نقش بازنمایی‌ها در درک مفهوم تابع

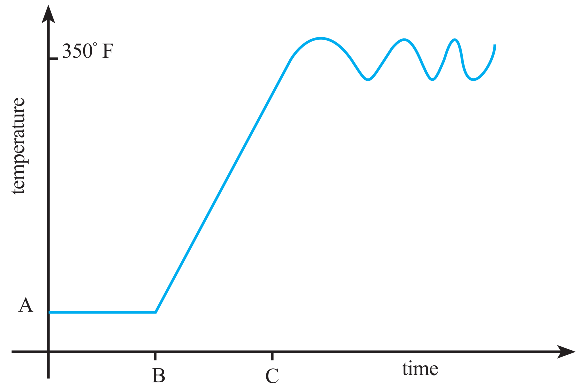
به اعتقاد یروشالمی[20] (۱۹۹۱)، کارکردن بین چندین بازنماییِ مرتبط جهت یادگیری یک مفهوم جدید، برای دانش‌آموزان بسیار سخت است. بعداً، کلر[21] و هیرش[22] (۱۹۹۸، نقل شده در آکووک، ۲۰۰۳) دریافتند که با ایجاد شرایط یادگیری مناسب، ارتباط بین یک مفهوم و بازنمایی‌هایش، براساس بازنمایی‌های اولویت‌بندی‌شده توسط دانش‌آموزان ساخته می‌شود. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که اولویت‌های محاسباتی دانش‌آموزان برای بازنمایی‌های مختلف توابع، به‌وسیلهٔ مقایسهٔ کاربردهای ترکیبی و غیرترکیبی تابع، که قبلاً آزمون شده، انجام می‌شود. این بدان معناست که مثلاً، دانش‌آموزان در شرایط ریاضی محض، استفاده از معادله را ترجیح می‌دهند، در حالی که برای حل مسائل ترکیبی و انجام فعالیت‌های مفهومی مربوط به تابع، استفاده از جدول و نمودار را ترجیح می‌دهند. در هر صورت، تابع یکی از اصلی‌ترین مفهوم‌های برنامهٔ درسی ریاضی است که در «دورهٔ ریاضی جدید»، به‌عنوان یک مفهوم هماهنگ‌کننده عمل می‌کرد و در برنامه‌های درسی اخیر، ابزاری قوی برای مدل‌سازی است (شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا؛ ۱۹۸۹ و ۲۰۰۰). به‌گفتهٔ این شورا، در دورهٔ دبیرستان، برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای باید شامل مطالعهٔ مداوم توابع به نحوی باشد تا همهٔ دانش‌آموزان بتوانند:

- پدیده‌های جهان واقعی را با توابع متنوع مدل‌سازی کنند؛
- روابط بین جدول‌ها، قوانین شفاهی، معادلات و نمودارها را بازنمایی و تحلیل کنند؛
- هم‌زمان بتوانند از بازنمایی‌های مختلف جدولی، نمادی و نموداری توابع استفاده کنند؛
- موقعیت‌های گوناگون مسئله را با تابع‌های مختلف مدل‌سازی کنند؛

تغییرات پارامتری را روی نمودار تابع‌های مختلف تجزیه و تحلیل کنند (ص ۵۷).

از نظر این شورا (۱۹۸۹)، تمام موضوعات مدرسه‌ای، زمینهٔ مناسبی برای آموزش تابع هستند. تابع‌ها در حساب، به‌عنوان اعمال روی اعداد ظاهر می‌شوند، مثل عمل جمع که یک زوج از اعداد را به مجموع آن‌ها نسبت می‌دهد. در جبر، توابع روابطی بین متغیرهایی هستند که اعداد را نمایش می‌دهند. در هندسه، توابع مجموعه نقاط را به تصویرهایشان تحت تبدیلاتی از قبیل انتقال و دوران نظیر می‌کنند و در احتمال، توابع پیشامدها را به احتمال وقوع آن‌ها نسبت می‌دهند (ص ۵۷).

به‌گفتهٔ این شورا، یک تابع می‌تواند به‌وسیلهٔ توضیح نوشتاری، فرمول جبری، جدولی از مقادیر ورودی- خروجی و بالاخره با یک نمودار توصیف شود. در نتیجه، لازم است دانش‌آموزان فرصت داشته باشند از طریق فعالیت‌های گوناگون مانند توصیف روابط بین پدیده‌ها در جهان واقعی، بازنمایی‌های مختلف تابع از جمله نمایش نمودار توابع و خواندن و تفسیر و توضیح، آن‌ها را یاد بگیرند. برای مثال، دانش‌آموزان باید بتوانند شکل‌هایی مانند شکل ۱ را رسم کنند و درمورد اینکه چه پدیده‌های واقعی- مثلاً دمای یک کوره- می‌توانند با چنین نموداری رسم شوند، بحث کنند؛ سؤال‌هایی مانند اینکه مقدار تقریبی A چقدر



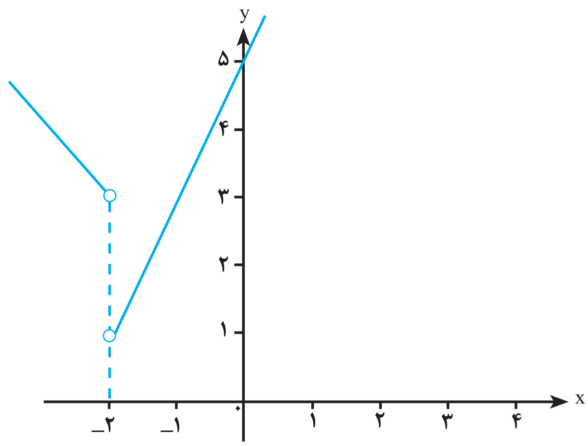
شکل۱
دمای کوره به‌عنوان یک تابع از زمان (NCTM، ۱۹۸۹)

است؟ در بازهٔ B تا C، چه اتفاقاتی می‌افتد؟ و نوسانات نمودار بعد از زمان C، چگونه می‌تواند باشد؟

چنین فعالیت‌هایی به دانش‌آموزان فرصت می‌دهد تا نمودار توابعی را که به‌صورت ضابطه‌ای داده شده‌اند، رسم کنند و بین بازنمایی نموداری و بازنمایی نمادین تابع، به سهولت رفت و برگشت داشته باشند. برای مثال، تجزیه و تحلیل شکل (۲)، می‌تواند به تعریف تابع دوضابطه‌ای

$$f(x)=\begin{cases}۲x+۵, & x>-۲\\ -x+۱, & x<-۲\end{cases}$$

منجر شود.



شکل۲ـ یک تابع دوضابطه‌ای

بدین سبب به‌گفتهٔ سایکا[۲۳] (۲۰۰۳)، تابع یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که در گوناگونی تفسیرها و بازنمایی‌ها فوق‌العاده است و به این دلیل، در فرایند آموزشی توجه بسیاری به آن شده و زمان زیادی برای آن صرف شده است. با این حال از نظر وی، تابع همچنان مفهومی پیچیده و مشکل باقی مانده است و با وجودی که ماهیت دوگانهٔ فرایند-شیء و بازنمایی‌های مختلف، ظرافت و پیچیدگی مفهوم تابع را نشان می‌دهند، دانش‌آموزان اغلب تنها بر ایده‌های شهودی روابط تابعی متکی هستند. او یکی از مشکلات اساسی دانش‌آموزان را در یادگیری تابع، همین ماهیت دوگانهٔ آن می‌داند.

در حقیقت به گفتهٔ اسفارد[۲۴] (۱۹۹۱، نقل شده در سارایوا[۲۵] و تکسیرا[۲۶]، ۲۰۰۷)، تابع می‌تواند به دو روش اساسی فهمیده شود:

- ساختاری که به‌عنوان یک شیء در نظر گرفته می‌شود؛
- عملیاتی که به‌عنوان یک فرایند فهمیده می‌شود.

در اولی، تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است و در دومی یک فرایند محاسباتی یا یک روش دقیق تعریف شده است. برای نظیرکردن یک مجموعه به مجموعه‌ای دیگر. این دو راه یادگیری تابع، هر چند ظاهراً مانع فهم هم می‌شوند (ممکن است یادگیری یکی، از فهم دیگری جلوگیری کند)، اما باید یکدیگر را کامل کنند و مثل دو روی یک سکه، یک مفهوم منسجم و مرتبط به هم را تشکیل دهند.

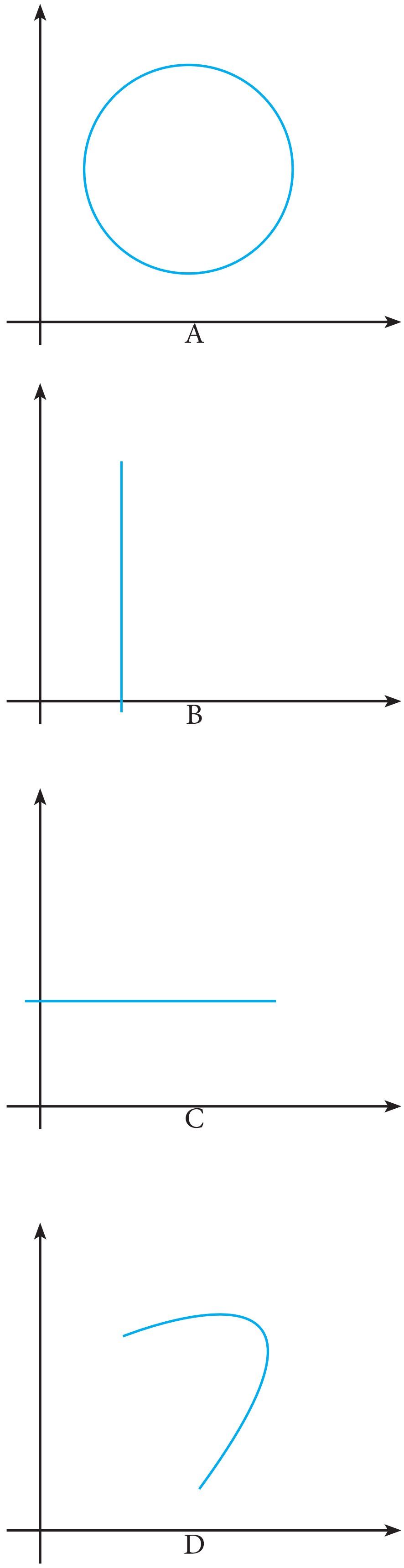
برای مثال، f(x)=۲x+۳ در یک زمان، دو مفهوم را بیان می‌کند:

- چگونه مقدار تابع را برای مقادیر خاص محاسبه کنیم (ویژگی فرایند بودن)؛
- کل مفهوم تابع را برای هر متغیر معین معرفی می‌کند (ویژگی شیء بودن).

مثل اینکه f(x)، هم نام تابع و هم مقدار تابع را معرفی می‌کند. به اعتقاد آن‌ها، اگرچه دانش‌آموزان تعریف تابع را حفظ می‌کنند، اما بیشترشان قادر به ایجاد ارتباط با این کلمات نیستند. سارایوا و تکسیرا (۲۰۰۷) در انجام یک تحقیق، از دانش‌آموزان خواسته بودند به دو سؤال زیر جواب دهند.

۱. شکل‌هایی را که معرف یک تابع هستند مشخص کنید و دلیل خود را توضیح دهید.

۲. به زبان سادهٔ خود بگویید تابع چیست؟



آن‌هـا مشـاهده کردند که تعـدادی از دانش‌آموزان، تعریفی را کـه از تابـع نوشـته بودند، با انتخابشـان از شـکلی که معرف تابع اسـت، مرتبط نکردند. برای مثال، چند دانش‌آموز برای تفسیر نمودارهای B و C، از تعریف «هر شـیء به یک و فقـط یک تصویر نظیر می‌شود» استفاده کردند. در این تحقیق، یکی از جنبه‌هایی که در تعریف‌هـای دانش‌آموزان زیاد به چشـم می‌خورد، وابستگی بین متغیرها بود. مثـلاً «در تابع، یک متغیر وابسـته (Y) و یک متغیر مستقل (X) وجود دارد» یا اینکه «در تابع، Y بر حسـب X تغییر می‌کند و هـر X، یک و فقط یک مقدار برای Y به دست می‌دهد». اما بـرای اکثـر دانش‌آمـوزان، مفهوم تابع محتوایـی ثابت دارد و بیان‌کننده تغییر نیسـت. برای نمونـه، با توجه به شـکل(۳) که بیانگر میزان آب پشت یک سد بر حسـب زمان طی یک سال است، از دانش‌آموزان خواسته شد متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنند.

تعدادی از دانش‌آموزان، روزها (نه تعداد روزها) را متغیر مسـتقل و آب (نـه میـزان آب) را متغیـر وابسـته در نظر گرفتـه بودند. به اعتقـاد سـایکا (۲۰۰۳)، توانایی دانش‌آموزان در انجام دسـت‌ورزی و به‌کار بردن نمادها، الزاماً به‌معنای درک سـاختاری دانش‌آمـوزان از تابع نیست. این در حالی است که تال و آکـوک[۲۷] (۲۰۰۲) معتقدند که از نظـر ریاضی‌دان‌هـا، درک تابع نمونه‌ای از سادگی است، زیرا چیزی ساده‌تر از اینکه «دو مجموعه داریم و هـر عنصر از اولی به دقیقاً یک عنصر از دومی مرتبط می‌شود وجود نـدارد». به گفتهٔ آن‌ها، برای ریاضی‌دان‌هـا ایـن تعریف نه‌تنها ساده اسـت بلکه زمینهٔ دست‌یابی به مجموعهٔ پیچیده‌ای از ایده‌های ریاضی را فراهم می‌کند.

اما جونز[۲۸] (۲۰۰۶) به این نتیجه رسید که در توسـعهٔ مفهوم تابع، همیشه بازنمایی‌های متنوعی برای معرفی آن ابداع شده‌اند که هر یک از این بازنمایی‌ها، در یادگیری جنبه‌ای خاص از این مفهـوم، مهم‌اند و هر یک قویاً، به سایر بازنمایی‌های تابع گره خورده‌اند، لذا معرفی تابع تنها به‌عنوان یک مجموعه، ممکن است دانش‌آموزان را گیج و سردرگم کند. **جونز** (۲۰۰۶) درک درست تابع را، فقط توانایی بیان تعریف رسمی آن نمی‌داند و با استناد به دوبینسکی[۲۹] و هارل[۳۰] (۱۹۹۲)، سه سطح درک حاصل شده توسط دانش‌آموزان را شناسـایی کرده است که اگرچه با هم کاملاً متفاوت نیستند، اما مانند یک زنجیر، به ترتیب، سطوح تجرید را نشـان می‌دهند. این سه سطح عبارت‌اند از: عمل، فرایند و شیء.

عمل

پایه‌ای‌تریـن درک از تابـع، تصور آن به‌عنوان یک عمل اسـت که دوبینسـکی و هارل، آن را یک تکرارپذیری ذهنی یا دسـت‌ورزی فیزیکی از اشـیا نامیده‌اند. در این مرحله از یادگیـری، دانش‌آموزان تشـخیص می‌دهند که چه چیزی یک تابع است. آن‌ها تابع را به‌عنوان یک قانـون صریـح می‌بینند که یـک ورودی را می‌گیرد و سـپس یـک خروجی می‌دهـد. با چنین درکی از تابـع، دانش‌آموزان دو تا از متداول‌تریـن بازنمایی‌های تابع یعنی بازنمایی نموداری و بازنمایی ضابطـه‌ای را بهتـر می‌فهمنـد. آن‌هـا نمودارهـا را قابل فهم‌ترین

بازنمایی‌هـــای تابـــع می‌داننـــد و اظهار می‌دارند که اگرچه در ذهن دانش‌آموزان، بازنمایی‌ها همیشـــه، مستقیماً با ایدهٔ اصلی تابع مرتبط نمی‌شـــوند، ولی اغلب، چند سال قبل از اینکه مفهوم رسمی تابع در ذهن یادگیرنده شکل گرفته باشد، نمودارهـــا به دانش‌آمـــوزان کمک می‌کنند تا اطلاعات مفیدی درمورد تابع‌ها مثل نقاط اکسترمم، صعودی بودن و نزولی بودن به‌دست آورند. آیزنبـــرگ[۳۱] نیز نظرش این بود که لازم اســـت مفهـــوم «تک‌مقداری بودن توابع حقیقی»، با روشـــی که ماهیتـــاً با یک بازنمایـــی نموداری گره خورده، فهمیده شـــود و همهٔ اجزای اصلی تابع، در یک شـــکل بصری معین تعریف شـــوند. آنان تأکید نمودند که وقتی دانش‌آموزان با توابع آشـــنا می‌شـــوند، ضروری است که بازنمایی ترسیمی، به‌طور ویـــژه‌ای مورد توجه قـــرار گیرد تا مهارت‌های بصـــری یادگیرندگان تقویت شود. با وجود این، بسیاری از دانش‌آمـــوزان بـــرای توســـعهٔ مهارت‌های بصری خود، به‌خصوص وقتـــی با توابع ناشـــناخته‌ای مثل تابع دریکله[۳۲] مواجه می‌شـــوند، با دشواری‌های زیادی روبه‌رو هستند زیرا برای آن‌ها، در نظر گرفتن توابع چندضابطه‌ای به‌عنـــوان یک تابع، سخت است و گاهی منجر به ایجاد یک بدفهمی در مـــورد موجودیت توابع ناپیوســـته در آن‌ها می‌شود (جونز، ۲۰۰۶).

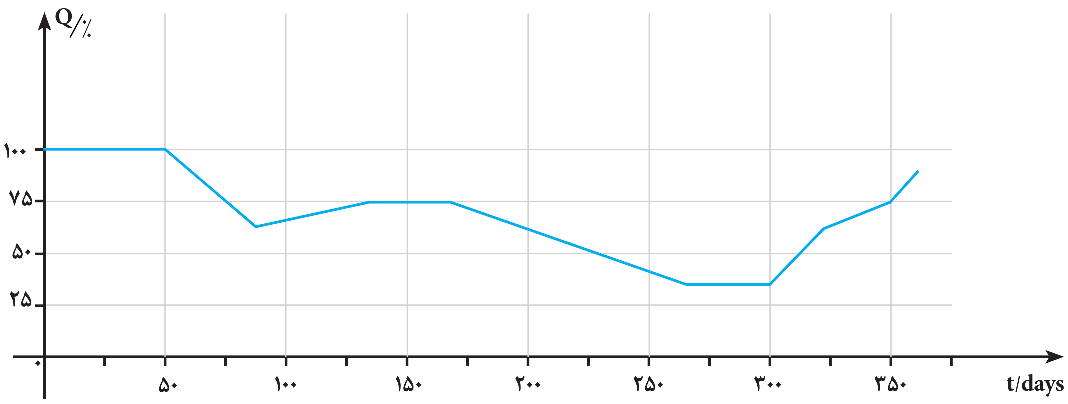
بالاخره، بازنمایـــی ضابطه‌ای نیز یکـــی دیگـــر از بازنمایی‌های مهم مفهـــوم تابع اســـت و تصور تابع از این راه، مشابه تعریف اولیهٔ اویلر[۳۳] از تابع اســـت. این بازنمایی، مخصوصاً برای آموزش حســـاب و قبل از حساب مفید است. اما لازم است دانش‌آموزان بدانند که توابع، نه لزوماً بازنمایی فرمولی دارند و نه همواره با اعداد ارتباط دارند.

فرایند

سطح بعدی درک مفهوم تابع، فرایند اســـت. این مفهـــوم درک عمیق‌تـــری از یک تابـــع، به‌عنوان چیزی که یک شـــیء را می‌گیرد، آن را تبدیل می‌نماید و یک شـــیء کاملاً جدید تولید می‌کند، به‌دست می‌دهد و شـــامل یـــک فرمول یا قانون صریح اســـت. در این سطح از یادگیری، دانش‌آمـــوزان مایلند توابعـــی را قبول کنند که شـــامل تبدیـــلات مبهمی هســـتند (مثلاً خیلی از دانش‌آموزان، تابع ثابت را به‌عنوان یک تابع در نظر نمی‌گیرند.)

ایدهٔ ماشـــین تابع، یـــک ابزار متداول اســـت که معلمـــان از آن برای کمک به دانش‌آموزان جهت درک تابـــع از منظـــر فراینـــدی، اســـتفاده می‌کنند. ایـــن تکنیک، تابع را به‌عنوان ماشین یا جعبه‌ای که یـــک ورودی را می‌گیرد و یک خروجـــی تولید می‌کنـــد، معرفی می‌کنـــد. در حالـــی که بـــا درک فرایندی، دانش‌آمـــوزان نیازی به دانســـتن محتوای جعبه ندارند و وجود یک ماشین به‌تنهایی، کافی است تا دانش‌آموزان متقاعد شوند که در حـــال کار کردن با یک تابع هســـتند (تال و همکاران، ۲۰۰۰). آن‌ها توصیه می‌کنند که استفاده از این بازنمایی مفید است، زیرا ماشین تابع، یک پایهٔ قدرتمند و یک ریشهٔ شـــناختی برای توســـعهٔ یادگیری مفهـــوم تابـــع اســـت و جنبه‌های دیداری و شـــکل ماشین تابع، هم در برگیرندهٔ وضعیت تابع به‌عنوان شـــیء و هم جنبهٔ فرایندی تابع از ورود تا خروج است.

دومین دیدگاه فرایندی به تابع، کارکردن با بازنمایی نمودار وِن تابع به‌عنوان تناظر بیـــن دو مجموعه اســـت. این دیدگاه به تابع، مشابه تعریـــف دیریکلـــه (۱۸۳۷) از تابع اســـت که تابع را به‌عنوان تناظری بیـــن دو مجموعه بیـــان می‌کند، به‌طوری که هـــر عضو از مجموعهٔ اول، فقـــط به یک عضو از مجموعهٔ



شکل ۳ـ میزان آب پشت یک سد بر حسب زمان طی یک سال (تکسیرا و سارایوا، ۲۰۰۷)

تحقیق روی بازنمایی‌های مختلف توابع نشان می‌دهد که اگر دانش‌آموزان بتوانند بازنمایی‌های متنوع را به هم مرتبط کنند، می‌توانند درک بهتری از مفهوم تابع پیدا کنند. به گمان آن‌ها، هر بازنمایی به یادگیری بخشی از مفهوم تابع و ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف، به یادگیری کامل مفهوم کمک می‌کند

دوم نظیر می‌شود. ایدهٔ تناظر، دانش‌آموزان را به‌جای استفاده از الگوریتم‌ها، به سمت تمرکز روی نگاشت یک مجموعه بر مجموعهٔ دیگر سوق می‌دهد.

شیء

پیشرفته‌ترین درک از تابع، شیء انگاشتن آن است که با استفاده از بازنمایی زوج مرتبی، به بهترین نحو بیان می‌شود. به گفتهٔ جونز (۲۰۰۶)، در سال ۱۹۳۹ یک گروه از ریاضی‌دانان با نام مستعار بورباکی[۳۴]، تابع را به شیوه زیر تعریف کردند:

فرض کنید که E و F، دو مجموعه مجزا یا غیرمجزا باشند. یک رابطه بین یک متغیر x از E و یک متغیر y از F، یک رابطه تابع گونه در y است، هرگاه برای هر x در E، یک y در F وجود داشته باشد که با x جفت شده باشد.

وی، این تعریف را اولین تعریف تابع به‌عنوان یک مجموعه از زوج‌های مرتب می‌داند که از نظر ریاضی، دقیق‌ترین تعریفی است که معرف ماهیت تابع است.

از این گذشته، اسفارد[۳۵] (۱۹۹۱)، دیدگاه تابع به‌عنوان شیء را مفهوم ساختاری خوانده و اظهار می‌دارد که این دیدگاه برای ریاضی‌دانان اهمیت دارد، زیرا فرایندهای شناختی را مؤثر می‌کند. اسفارد استدلال می‌کند که لازم است دانش‌آموزان، ابتدا تابع را به‌عنوان عملیات (فرایند) یاد بگیرند تا طبیعی‌تر بتوانند آن را به‌عنوان شیء توسعه دهند.

این در حالی است که به‌گفتهٔ آکووک (۲۰۰۳)، تحقیق روی بازنمایی‌های مختلف توابع نشان می‌دهد که اگر دانش‌آموزان بتوانند بازنمایی‌های متنوع را به هم مرتبط کنند، می‌توانند درک بهتری از مفهوم تابع پیدا کنند. به گمان آن‌ها، هر بازنمایی به یادگیری بخشی از مفهوم تابع و ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف، به یادگیری کامل مفهوم کمک می‌کند. در همین راستا، گلدنبرگ[۳۶] (۱۹۹۸ به نقل از کاپوت، ۱۹۹۸)، ابراز می‌کند که برقراری ارتباط بین بازنمایی‌های متنوع یک مفهوم، میزان تجرید آن مفهوم را کاهش می‌دهد و یک دید منسجم‌تر و یکپارچه‌تر نسبت به آن فراهم می‌کند.

با این وجود، اخیراً دیدگاه استفاده از بازنمایی‌ها، مورد بعضی انتقادها قرار گرفته است. برای مثال، از نظر اسفارد (۲۰۰۰) این خطر وجود دارد که بازنمایی‌ها، صرفاً نمایش برخی اشیا و مجزا از مفهوم آن‌ها تصور شوند. این وضعیت می‌تواند برای یادگیرنده، توجیهی باشد بر اینکه اشیا و مفاهیم، از بازنمایی‌های آن‌ها مهم‌تر هستند و باید قبل از نشانه‌ها و نمادها یاد گرفته شوند. در تأیید این نگرانی، مارکوس (۲۰۰۶) بیان می‌کند که مثلاً تصویر یک مثلث، یک مثلث نیست، بلکه فقط نمایشی از آن است و مثلث چیزی است که با این شکل معرفی شده است؛ یعنی مفاهیم نمی‌توانند از بازنمایی‌ها جدا باشند زیرا نمی‌توان قبل از نمایش دادن مثلث، توضیح داد که مثلث چیست و دارای چه ویژگی‌هایی است. تامپسون[۳۷] (۱۹۹۴)، استفاده از بازنمایی‌های مختلف را برای ایجاد درک عمیق‌تر از تابع، چنین نقد کرده است.

«ایدهٔ بازنمایی‌های مختلف به تعبیر فعلی و برای ساخت اولیه، نیازمند توضیح و تفسیر آن ایده‌هاست. هستهٔ اصلی مفهوم تابع، به‌وسیلهٔ هرآنچه که عموماً بازنمایی نامیده می‌شود، معرفی نمی‌شود. بلکه در عوض، ارتباط برقرار کردن بین انواع بازنمایی‌ها، زمینه را برای ایجاد یک درک معقول و با ثبات از تابع به‌وجود می‌آورد» (تامپسون، ۱۹۹۴، ص. ۳۹).

به عقیدهٔ گویا و سرشتی (۱۳۸۵)، «ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های مختلف و مرتبط کردن آن‌ها، باعث به‌وجود آمدن مشکلاتی در فهم اشیای ریاضی می‌شود. مثال‌هایی وجود دارند که در آن‌ها، با استفاده از یک بازنمایی گرافیکی، مسئله به سادگی می‌توانسته حل شود، ولی دانش‌آموزان از بازنمایی‌های عددی یا نمادین استفاده کرده بودند که با تجربه‌های قبلی آن‌ها سازگارتر بوده و به میزان بیشتری، مورد تأکیدشان قرار گرفته بود.

در مجموع، تامپسون (۱۹۹۴) پیشنهاد می‌کند که بهتر است پیش از معرفی نمودارها، توضیحات شفاهی و جدول‌ها به‌عنوان نمایش‌های تابع یا بازنمایی‌های مختلف آن ابتدا بر نمایش‌هایی که توسط دانش‌آموزان قابل درک و بیان است، تمرکز کنیم. بنا به اظهار وی، اگر دانش‌آموزان هنگام استفاده از بازنمایی‌های مختلف

یک مفهوم، ندانند که همگی آن‌ها، به بیان یک مفهوم می‌پردازند تا درک واحدی از آن مفهوم ایجاد شود، این نگرانی وجود دارد که دانش‌آموزان، هر بازنمایی را موضوعی مجزا تصور کنند و آن را مستقل از مفهوم اصلی یاد بگیرند (نقل شده در آکووک، ۲۰۰۳).

جمع‌بندی

در این مقاله، ابتدا دیدگاه بازنمایی‌های مختلف از منظر محققان آموزش ریاضی معرفی شد. سپس نقش بازنمایی‌ها در یادگیری ریاضی مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه، به تابع به‌عنوان موضوعی که با استفاده از بازنمایی‌ها معرفی می‌شود، پرداخته شد و در این زمینه تلاش شد تا به اختصار، به بازنمایی‌های مختلف تابع اشاره شود. در نهایت، به اجمال، به بعضی از انتقادات مطرح شده در رابطه با نقش بازنمایی‌های مختلف در یادگیری تابع پرداخته شد.

پی‌نوشت‌ها

1. Skemp
2. Janvier
3. Kastberg
4. Written
5. Pictorial
6. Tabular
7. Oral
8. Markus
9. Goldin
10. Kaput
11. Ozel
12. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
13. Steen
14. Tall
15. Vinner
16. Dreyfus
17. Zimmermann
18. Reflective
19. Associative
20. Yerushalmy
21. Keller
22. Hirsch
23. Sajka
24. Sfard
25. Saraiva
26. Teixeira
27. Akkoc
28. Jonesa
29. Dubinsky
30. Harel
31. Theodore Eisenberg
32. Dirichlet
33. Euler
34. Bourbaki
35. Anna sfard
36. Goldenberg
37. Thompson

منابع

1. Akkoc, H. & Tall, D. (2005). A mismatch curriculum design and student learning: the case of the function concept, in D. Hewitt and A. Noyes (Eds.), Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick
2. Tall, D. (1991). (ed.): Advanced Mathematical Thinking.
3. Jonesa, M. (2006). Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the concept of the Function.
4. Principles and Standards for School Mathematics, Key Curriculum Press; 1ST edition; National Council of Teachers of Mathematics (2000).
5. Saraiva, M. J. and Teixira, A. M. (2007). Secondary School Students' Understanding of the Concept of Function. msaraiva@mat.ubi.pt,anamadalenabt@hotmail.com
6. Hahkioniemi, M. (2006). The Role of Representations in Learning the Derivative.
7. Kastberg, S. E. (2002). Understanding Mathematical Concepts: The Case of The Logarithmic Function.
8. Thompson, p. w. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.)
9. NCTM (2000), Principles and Standards for School Mathematics.
10. NCTM (1989), Principles and Standards for School Mathematics; Curriculum Standards for Grades 9- 12; Standard 6-Functions.
11. Gooya, Z. (1988). Students' Conceptual of Calculus.
12. Skemp, R. (1989). Mathematics in The Primary School.

۱۳. جوادی، مهدی (۱۳۸۷). **تصورات مفهوم و تعاریف مفهوم از مفهوم تابع**، پایان‌نامه منتشر شدهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

۱۴. حاجی‌بابایی، جواد. (۱۳۷۵). **در باب برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره ۴۶، صص ۲ تا ۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۵. دافعی، حمید. (۱۳۸۹). **بازنمایی‌های چندگانه در آموزش ریاضی**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره ۱۰۰، صص ۷۰ تا ۷۵. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۶. ریحانی، ابراهیم. (۱۳۸۴). **آموزش تابع برخی رویکردها و چالش‌ها**.

۱۷. غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۸۰) **دوباره‌نگری به برنامه جبر دبیرستانی**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره ۶۳، ص۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۸. گویا، زهرا و پرهیزگار، بی‌بی‌زکیه (۱۳۸۹). **درک دانش‌آموزان از مفهوم اصلی تابع**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره۹۹، صص۲۴ تا ۳۳. دفتر انتشارت کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۹. گویا، زهرا و سرشتی، حمیده. (۱۳۸۵a). **آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی**، قسمت اول. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره ۸۴، صص۲۸ تا ۳۶. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲۰. گویا، زهرا و سرشتی، حمیده (۱۳۸۵b). **آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی**، قسمت اول. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۸۵، صص ۲۰ تا ۲۶. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲۱. گویا، مریم. (۱۳۸۲). **مفهوم تابع و بدفهمی دانش‌آموزان**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شماره ۷۲، صص ۲۳ تا ۳۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲۲. گویا، زهرا و فدایی، محمدرضا. (۱۳۷۸). **مدل‌هایی برای برنامهٔ درسی ریاضی**. قسمت اول. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۵۶، صص۴ تا ۲۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.